

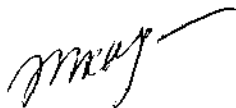
Ткаченко Людмила Александровна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБАХ  
ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСОВ**

**01.02.05** - механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Казань 2003

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент Р.Г. Галиуллин

Научный консультант: доктор физико-математических наук,  
профессор Р.Г. Зарипов

Официальные оппоненты: кандидат физико-математических наук,  
доцент Е.И. Филатов

доктор технических наук,  
профессор Н.И. Михеев

Ведущая организация: Казанский государственный технический  
университет им. А.Н. Туполева

Защита диссертации состоится 19 июня 2003 г. в 14 часов 30 минут в аудитории **Физ.2** на заседании диссертационного Совета **Д212.081.11** при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, **18**.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "15" 06.06 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного Совета  
кандидат физико-математических наук, доцент



А.А. Саченков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность** темы. В данной работе изучаются продольные нелинейные колебания газа в трубах с различными условиями на концах вблизи резонансов. Такие режимы колебаний часто встречаются в технике. С одной стороны **они могут** быть полезны, так как существенно стабилизируют и интенсифицируют горение, повышают теплонапряженность топочных камер, улучшают тепло- и массообмен, снижают гидравлическое сопротивление. С другой стороны, возникновение колебаний вблизи резонансов является нежелательным явлением, поскольку они нарушают прогнозы сделанные при расчете работы агрегата. В частности, нелинейные колебания рабочей среды в **ЖРД**, газотурбинных установках, мощных парогенераторах, в тепловых контурах АЭС и т.п. увеличивают местные коэффициенты теплоотдачи, механические и тепловые напряжения, что может привести к разрушению не только трубопроводных систем, но и всей конструкции в целом.

При нелинейных колебаниях газа в трубах наблюдаются термоакустические эффекты, которые возникают при неравномерном температурном поле. На основе этих эффектов разрабатываются волновые тепловые (холодильные) машины, имеющие большое прикладное значение. Особый интерес представляют турбулентные режимы движения осциллирующих потоков, поскольку они наблюдаются во многих реальных устройствах.

Развитие теории нелинейных колебаний, возникающих в реальных сложных системах, где колебания генерируются сочетанием различных источников возбуждения, представляет значительную математическую трудность. Поэтому исследование основных нелинейных эффектов при продольных колебаниях газа вблизи резонансов на простых моделях, в частности, в трубе с гармоническим возбуждением среды, является актуальным.

Целью работы является теоретическое исследование нелинейных колебаний однородного и неоднородного газа в трубах с различными граничными условиями на концах вблизи резонансов в области перехода к периодическим ударным волнам. В связи с этим ставятся задачи:

- исследование резонансных колебаний в однородном и неоднородном газах в закрытой трубе в области перехода к ударным волнам
  - исследование нелинейных колебаний газа в полукоткрытой трубе вблизи резонансов с учетом полигармоничности спектра скорости на открытом конце
  - расчет вторичных течений в полукоткрытой трубе с учетом числа **Прандтля** и поглощения на стенках
  - разработка модели турбулентности в осциллирующих потоках и исследование резонансных колебаний газа в полукоткрытой трубе в случае, когда турбулентность достигает оси трубы на поздней стадии ускорения
- Научная новизна:**
- получено аналитическое решение для второй гармоники при резонанс-

**ных** колебаниях газа в закрытой трубе в области перехода к ударным волнам

- изучено влияние ориентации поршня на резонансные колебания газа в закрытой трубе при наличии осевого скачка температуры
- сформулировано нелинейное граничное условие на открытом конце с учетом полигармоничности колебаний скорости у выходного сечения трубы
- рассчитаны вторая и третья гармоника при колебаниях в полуоткрытой **трубе**, с учетом генерации высших гармоник на поршне, колеблющемся на частоте  $\omega$  и нелинейного граничного условия на открытом конце
- исследовано влияния числа **Прандтля** и поглощения на стенках на скорость вторичных течений в вязкой и теплопроводной среде
- разработана модель турбулентных осциллирующих потоков в трубах и исследованы резонансные колебания газа в полуоткрытой трубе в турбулентном режиме в случае, когда турбулентность достигает оси трубы на поздних стадиях ускорения

Теоретическая и практическая значимость. Полученные теоретические результаты дают более полное представление о сложных газодинамических процессах, происходящих при возбуждении нелинейных колебаний газа в трубах вблизи резонансных частот. Данные могут быть использованы при расчетах волновых процессов в различных устройствах, в которых возникают резонансные режимы колебания рабочей среды (**ЖРД**, трубопроводах, камерах внутреннего сгорания и т.п.).

Обоснованность и достоверность. Предложенные в диссертационной работе методики расчета и вытекающие из них выводы основаны на фундаментальных законах и уравнениях механики жидкости и газа, а также физически естественных допущениях. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными других авторов.

Апробация **работы**. Результаты работы докладывались и обсуждались на: XI, XII, XIII, XIV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции «**Внутрикамерные** процессы в энергетических установках, акустика, диагностика, экология» (Казань, 1999 г., 2000 г., 2001 г., 2002 г.), V, VI Международная конференция «Нелинейные колебания механических систем» (Н. Новгород, 1999 г., 2002 г.), Всероссийской школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН В.Е. Алемасова «Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (Казань, 1999 г., 2000 г., 2002 г.), III Международной конференции по **неравновесным** процессам в соплах и струях (Истра-Москва, 2000 г.), Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2000 г.), IV Научно-практической конференции молодых ученых и специалистов Республики Татарстан (Казань, 2001 г.), VIII Четаевской Международной **конференции** «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Казань, 2002 г.), 13 Зимней школе по механике

сплошных сред (Пермь, 2003 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов и списка литературы. Общий объем диссертации - 151 стр., в том числе 28 рисунков, расположенных по тексту, и список литературы на 15 стр., включающий 156 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, излагается ее краткое содержание и приводятся основные результаты, которые выносятся на защиту.

В первой главе приведен обзор и анализ литературы посвященной теоретическим и экспериментальным исследованиям резонансных колебаний в трубах, заполненных однородным и неоднородным газом. Показано, что большинство работ по колебаниям газа в закрытых трубах посвящено области разрывов, а область перехода от слабо нелинейных к ударным волнам исследована недостаточно: не учитываются генерация высших гармоник, поглощение на стенках и влияние неоднородности газа при наличии скачка температуры. В случае, когда один конец трубы закрыт поршнем, а другой конец открыт (полуоткрытая труба), моделирование граничного условия на открытом конце далеко от завершения, поскольку колебания скорости на открытом конце полагаются гармоническими, а не полигармоническими. Также отмечается, что слабой нелинейности сравнительно мало изучена: не учитываются генерация высших гармоник и вторичные течения. Анализ исследований по турбулентным колеблющимся потокам выявил, что большинство работ относятся к пульсирующим течениям, а осциллирующие потоки исследованы недостаточно. На настоящее время не существует модели осциллирующих турбулентных потоков и отсутствует теория резонансных колебаний в полуоткрытой трубе в **случае**, когда турбулентность развивается медленно, достигая оси трубы спустя определенный промежуток времени после начала ускорения.

Таким образом, на основании анализа рассмотренных теоретических и экспериментальных исследований формулируется цель, и ставятся задачи диссертационной работы.

Во второй главе представлено математическое описание колебаний газа в длинной трубе ( $R/L \ll 1$ , где  $R$  - радиус,  $L$  - длина трубы), на одном конце которой расположен гармонически колеблющийся поршень, другой конец либо закрыт, либо сообщается с окружающей средой.

Приводится полная система гидродинамических уравнений, описывающих состояние движущегося газа: уравнение неразрывности, движения, энергии и состояния. Затем после оценки всех членов входящих в эти уравнения и

отбрасывания слагаемых с множителем порядка  $(R/L)^2$  и выше получается система уравнений, описывающая колебания газа в длинной цилиндрической трубе

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r v p)}{\partial r} &= 0, \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2, \\ p &= \rho R_g T, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  - время,  $x, r$  - осевая и радиальная координаты,  $\rho$  - плотность,  $u, v$  - осевая и радиальная компоненты скорости,  $p$  - давление,  $T$  - температура,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $R_g$  - газовая постоянная,  $c_p$  - удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Для расчета высших гармоник при резонансных колебаниях газа в цилиндрической трубе при наличии осевой симметрии используется система

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{2\tau_w}{R}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{2(\gamma - 1)}{R} q_w, \end{aligned} \quad (2)$$

полученная после некоторых модификаций и осреднения по сечению трубы уравнений (1), где  $\gamma$  - показатель адиабаты,  $\tau_w$  - касательное напряжение на стенке,  $q_w$  - тепловой поток на стенке.

Для полного математического описания рассматриваемых процессов при установившихся резонансных колебаниях газа в трубах задаются граничные условия. Для системы (1) - условие симметрии на оси трубы, условие прилипания и постоянства температуры на стенке. Для системы (2) - граничные условия на концах трубы. При этом в граничном условии на поршне

$$u(x=0) = \omega \ell_0 \cos \omega t - 0,5 \omega \ell_0 r_1 \cos 2\omega t - \omega \ell_0 r_2^{(2)} \cos 3\omega t, \quad (3)$$

при переходе от лагранжевой к эйлеровой системе координат учитывается полигармоничность скорости движения газа в трубе. Тогда вклад второй и

третьей гармоник. В условии (3)  $r_1, r_2^{(2)}$  - безразмерные амплитуды колебаний первого и второго порядка, соответственно,  $\omega$  - циклическая частота,  $\ell_0$  - амплитуда смещения поршня.

Далее вводятся параметры, характеризующие колебания газа в трубах

$$M_p = \omega \ell_0 / c_0, H = R \sqrt{\omega / \nu}, Sh = \omega R / V, s = V / \omega L, \quad (4)$$

где  $M_p$  - число равное отношению максимальной амплитуды смещения поршня к скорости звука в невозмущенном газе,  $Y$  - частотный параметр,  $Sh$  - число **Струхала**,  $\varepsilon$  - параметр нелинейности,  $c_0$  - скорость звука в невозмущенном газе,  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости,  $V$  - максимальная амплитуда колебаний скорости на открытом конце на фундаментальной частоте колебаний газового столба.

Поскольку амплитуда смещения поршня  $\ell_0$  намного меньше длины трубы  $L$ , то, учитывая условие вблизи резонанса  $k_0 L \sim 1$ , где  $k_0 = \omega / c_0$  - волновое число для невозмущенного **газа**, получим  $M_p \ll 1$ . Параметр  $H$  представляет собой отношение радиуса трубы  $R$  к толщине акустического пограничного слоя (слоя Стокса)  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ . Наиболее интересен для практики случай, когда пограничный слой занимает лишь тонкую пристеночную часть трубы  $\delta \ll R$ , т.е.  $H \gg 1$ . Далее считаем, что амплитуда смещения частиц  $s = V/\omega$ , намного больше радиуса трубы, и в тоже время намного меньше ее длины. Тогда, выражая число Струхала и параметр нелинейности через амплитуду смещения частиц, имеем  $Sh = R/s$  и  $\varepsilon = s/L$ . Очевидно, что принятые условия обеспечивают неравенства  $Sh \ll 1$  и  $\varepsilon \ll 1$ .

При  $\varepsilon \ll 1$  для решения уравнений описывающих тепло- и массоперенос можно использовать метод возмущений, заключающийся в разложении искомых термодинамических величин и компонент скорости по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Подставляя разложения в уравнения (1), (2) и граничные условия и собирая члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$ , в итоге получим исходные системы уравнений в первом, втором и третьем приближениях с соответствующими **граничными** условиями.

В третьей главе исследуются нелинейные колебания однородного и неоднородного газа в закрытой трубе в области перехода к ударным волнам.

Рассматривается генерация второй гармоники, в случае колебаний поршня на частоте  $\omega$ . Для описания колебаний газа на второй гармонике используется полученная во второй главе система уравнений (2) во втором приближении. Решая систему совместно с граничными условиями на поршне и закрытом конце, в итоге получаем выражения для амплитуд колебаний скорости и давления, которые при точном резонансе записываются как

$$\tilde{u}_2(x) = (C_{22} - C_{21} - 0.5M_p r_1) \frac{\sin(2\pi\bar{x})}{2k_0 L \beta'_2} - 0.5M_p r_1 (1 - \bar{x}) \cos(2\pi\bar{x}) + iM_p r_1 \frac{\sin(2\pi\bar{x})}{4k_0 L \beta'_2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(x) = & \left( \frac{M_p r_1}{4k_0 L \beta'_2} + 4A \right) \cos(2\pi\bar{x}) + 4B + \\ & + i(C_{22} - C_{21} + 0.5M_p r_1) \frac{\cos(2\pi\bar{x})}{2k_0 L \beta'_2} + i0.5M_p r_1 (1 - \bar{x}) \sin(2\pi\bar{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $C_{21} = \frac{2k_0 LA \beta'_2}{(\beta'_1 - \beta'_2)} - 0.5M_p r_1$ ,  $C_{22} = \frac{2k_0 LA(2\beta'_1 - \beta'_2)}{(\beta'_1 - \beta'_2)}$ ,

$$A = \frac{r_1^2(\gamma + 1)}{32}, \quad B = \frac{r_1^2(\gamma - 1)}{32}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \beta'_2 = \frac{\delta}{2\sqrt{2}R} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right)$$

и  $p_2 = p_2 / \rho_0 c_0^2$ ,  $u_2 = u_2 / c_0$  — безразмерные амплитуды колебаний давления и скорости второго приближения. Амплитуда колебаний газа при точном резонансе на первой гармонике имеет вид

$$r_1 = \frac{M_p}{k_0 L \beta'_1}, \quad (7)$$

где  $\beta'_1 = (\delta/2R) \left( 1 + (\gamma - 1)/\sqrt{\text{Pr}} \right)$  — дисперсия,  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

Оценка членов в (5) и (6) показывает, что вклад величин, содержащих  $M_p r_1$ , незначителен и, следовательно, безразмерную амплитуду колебаний второго порядка можно представить в виде

$$r_2 = \frac{C_{22} - C_{21}}{2k_0 L \beta'_2} \quad (8)$$

Из рис.1 видно, что в рассматриваемом диапазоне значений  $\ell_0/L$  имеется хорошее качественное и количественное согласие результатов расчетов по выражению (8) с экспериментальными данными (Temkin S. Nonlinear gas oscillations in a resonant tube // Phys. Fluids. 1968. Vol.11. N 5. P.960-963), уменьшающееся с ростом  $\ell_0/L$ .

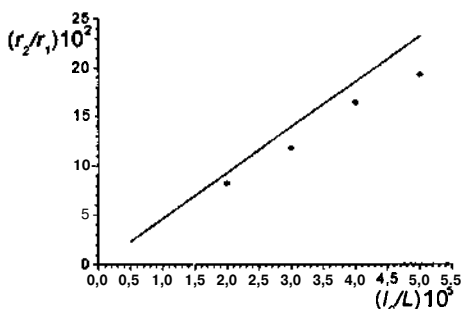


Рис.1. Зависимость  $r_2/r_1$  от отношения амплитуды смещения поршня к длине трубы  $\ell_0/L$ : сплошная линия теория, точки — Temkin, 1968



Колебания удвоенной частоты в закрытой трубе генерируются за счет нелинейности столба газа в трубе и нелинейности граничного условия на поршне.

На рис. 2 сплошной линией дано распределение колебаний скорости  $|\tilde{u}_2(x)|/r_1^2$  по длине трубы с учетом нелинейности газового столба и нелинейности граничного условия на поршне, пунктирной линией распределение колебаний скорости в случае, когда нелинейность газового столба равна нулю ( $\dot{A} = 0$ ,  $\ddot{A} = 0$ ) и источником нелинейности служит граничное условие на поршне. Видно, что в случае колебаний на частоте  $2\omega$  нелинейность газового столба внутри трубы оказывается существенно больше нелинейности, обусловленной граничным условием на поршне. При этом за счет последней минимальное значение модуля амплитуды колебаний скорости несколько отлично от нуля.

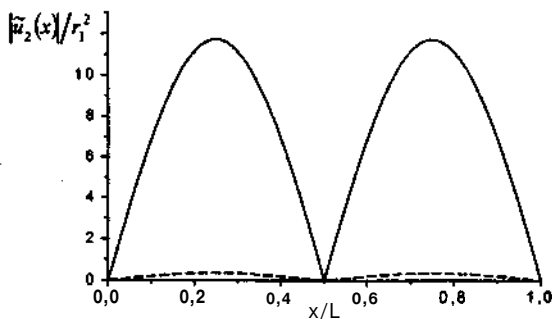


Рис.2. Распределение  $|\tilde{u}_2(x)|/r_1^2$  по длине трубы при  $L = 2m$ ,  $\ell_0 = 10^{-4}m$ . Сплошная линия построена с учетом нелинейности газового столба внутри трубы и нелинейности граничного условия на поршне, пунктирная - с учетом только нелинейности граничного условия на поршне

Далее исследуются резонансные колебания газа при наличии температурной неоднородности. Колебательная система представляет собой трубу, на одном конце которой расположен гармонически колеблющийся поршень, другой конец закрыт. Труба заполнена газом, который на участке длиной  $0 < x < \sigma'$  имеет температуру  $T_1$ . Остальная часть трубы находится при температуре  $T_2$ . Предполагается, что  $T_1 > T_2$ . Для характеристики колебаний в такой системе к параметрам (4) добавляется еще один  $N = T_1/T_2$ .

При колебаниях в однородном газе, т.е. когда скачок температур расположен на одном из концов трубы, получаем известное выражение (7).

При колебаниях в трубе с температурной неоднородностью, т.е. когда скачок температуры расположен в произвольном сечении трубы (при этом предполагается, что поршень соприкасается с горячим газом) задаем уравнения для давления и скорости в первой и второй средах. Такая система решается совместно с граничными условиями на границе двух сред, где давление и скорость изменяются непрерывно, и граничными условиями на поршне и закрытом конце трубы.

На рис.3 представлена зависимость безразмерной резонансной частоты от положения скачка температуры  $\xi$ . Видно, что по мере смещения скачка от

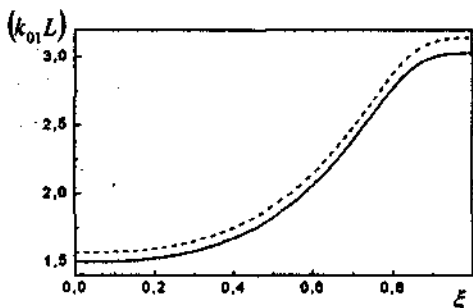


Рис.3. Зависимость безразмерной резонансной частоты  $(k_0 L)$  от положения скачка температуры для  $L = 2m$ ,  $R = 0,01m$ .

Сплошная линия - при наличии поглощения,  
Штриховая - без учета поглощения.

поршня к закрытому концу трубы (рост  $\xi$ ) безразмерная частота увеличивается. При этом наиболее быстрые изменения происходят, когда скачок расположен посередине или в правой половине трубы. При приближении к концам трубы изменения ослабевают. Также можно заметить, что наличие пристеночного поглощения приводит к незначительному снижению безразмерной резонансной частоты.

Безразмерная амплитуда колебаний определяется в первой среде как

$$r_{1m} = (k_0 L)_p / \beta_{1p} (l_0 / L) \quad (9)$$

во второй среде в виде

$$r_2 = (m_1 / m_2) r_1, \quad (10)$$

где  $m_1 = \sqrt{w_1^2 + (1 - w_1^2) \cos^2 \nu_1}$ ;  $m_2 = \sqrt{w_1^2 + (1 - w_1^2) \cos^2 \nu_2}$ ;

$$\nu_1 = k_0 L (1 + \beta'_1 \xi + \alpha_1), \quad \nu_2 = k_0 L (1 + \beta'_2 (1 - \xi)), \quad w_1 = \beta_1 - k_0 L \beta'_1 \xi,$$

$w_2 = k_0 L \beta'_2 (1 - \xi)$ ,  $(k_0 L)_p$  - безразмерная резонансная частота при наличии пристеночного поглощения.

На рис.4 даны зависимости безразмерных амплитуд от положения скачка  $\xi$  при точном резонансе. Все  $r_{\tau}$  имеют по  $\xi$  по одному максимуму и одному минимуму. При этом за исключением случаев, когда труба наполнена либо холодным, либо горячим газом почти полностью, безразмерные амплитуды колебаний в горячих областях существенно меньше амплитуд колебаний в холодных областях, а

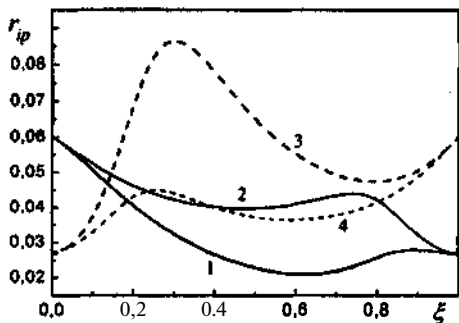


Рис.4. Зависимость безразмерной амплитуды колебаний от положения скачка температуры:

1 -  $r_{1m}$ , 2 -  $r_{2m}$  (поршень соприкасается с горячим газом); 3 -  $r_{1m}$ , 4 -  $r_{2m}$  (поршень соприкасается с холодным газом)

амплитуды в случае, когда **поршень** соприкасается с горячим газом существенно меньше соответствующих амплитуд для случая, когда поршень соприкасается с холодным газом (**Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ларионов В.М.** Резонансные колебания газа в трубе при наличии осевого градиента температуры // Изв. Вузов. Авиационная техника. 1997. N 4. **С.50-53**).

В четвертой главе изучаются нелинейные колебания газа в полукруглой трубе в области перехода к периодическим ударным волнам.

Моделируется граничное условие на открытом конце, принимая предложенную **Вайнгаарденом** (Van Wijngaarden L. On oscillations near and at resonance in open pipes // J. **Engng. Math.** 1968. Vol.2. N 3. **P.225-240**), модель струйного истечения и сферического втекания в сток, расположенный вблизи выходного сечения трубы. При **этом** учитываем полигармоничность колебаний скорости на открытом конце, т.е. скорость содержит вклад высших гармоник.

В граничном условии на частоте  $\omega$  ограничиваемся только квадратичными членами

$$\tilde{p}_1(x=L) = m r_1 \tilde{u}_1(x=L), \quad (11)$$

где  $= 0,5[2(0,5m_0 + a_0)(0,5 + a_1) - (0,5 + a_1)p_2 + a_2a_3 - a_3a_4 + a_4a_5]$ ,  $m_0$  - коэффициент, учитывающий геометрию открытого конца трубы,  $a_i$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье гармонической составляющей скорости струи на расстоянии  $x_L = 3R$  от выходного сечения трубы,  $p_1 = p_1/\rho_0 c_0^2$ ,  $u_1 = u_1/c_0$  - безразмерные амплитуды колебаний давления и скорости в первом приближении,  $L = L_0 + \sigma R$  - эффективная длина трубы,  $a$  - поправка Рэлея.

Колебание на частоте  $2\omega$  нерезонансное, поэтому, в граничном условии также оставим только члены второго порядка

$$\tilde{p}_2(x=L) = b_2 r_1^2 \cos 2\omega x, \quad (12)$$

где  $b_2 = (0,5m_0 + a_0)p_2 - 0,25(0,5 + a_1)^2 + 0,5(0,5 + a_1)p_3 + 0,5a_2a_4 + 0,5a_3a_5 + 0,25$ .

Анализ граничного условия при колебаниях на частоте  $3\omega$  показал, что в данном случае недостаточно учитывать квадратичные члены, поэтому в выражении сохраняем члены третьего порядка

$$\tilde{p}_3(x=L) = b_3 r_1^2 \sin 3\omega x + f r_1 r_2 \cos 3\omega x + g r_1 r_3 \sin 3\omega x \quad (13)$$

где  $b_3 = 0,5[2(0,5m_0 + a_0)p_3 + (0,5 + a_1)p_2 - (0,5 + a_1)p_4 + a_2a_5]$ ,

$$f = [(0,5m_0 + a_0)p_3 - 0,5(0,5 + a_1)p_2 + 0,5a_2c_1 + 0,5]$$

$$g = [(0,5m_0 + a_0)p_3 + 0,5(0,5 + a_1)p_4 + a_3d_0]$$

$c_1, d_1$  - коэффициенты разложения в ряд Фурье  $\sin 2\omega$  и  $\sin 3\omega$ , соответственно.

Учитывая полученные граничные условия, рассчитываются колебания газа на частотах  $2\omega, 3\omega$  при гармоническом возбуждении на частоте  $\omega$ .

Используется та же методика, что и в случае закрытой трубы. Отличие заключается в том, **что** колебание на частоте  $2\omega$  является нерезонансным. В результате находим выражения для амплитуд колебаний скорости и давления

$$\tilde{u}_2(\bar{x}) = \frac{in^2}{16} \{ (16b_2 - \gamma + 3) \sin 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x}) + (\gamma + 1) [\pi - 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x})] \cos 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x}) \}, \quad (14)$$

$$\tilde{p}_2(\bar{x}) = \frac{r_1^2}{1 - \gamma} \{ (16b_2 + 2 - 2\gamma) \cos 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x}) + (\gamma + 1) [\pi - 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x})] \sin 2k_0 L (1 + \beta'_1)(1 - \bar{x}) \}. \quad (15)$$

Зависимость модуля безразмерной амплитуды колебаний давления на открытом конце трубы  $\tilde{p}_2(L)/M$  от безразмерной частоты  $z = (2/\pi)(\omega L_0/c_0)$  (рис.5) качественно и количественно согласуется с результатами экспериментов (Stuhltrager E., Thomann H. Oscillations of a gas in an open-ended tube near resonance // ZAMP. 1986. Vol.37. N 3. P.155-175). Прослеживается, что за счет концевой поправки на открытом конце резонансная частота сдвинута в сторону большего значения.

Из рис.6 видно, что расчет эпюров давления по (15) при точном резонансе, когда выполняется условие  $k_0 L(1 + \beta'_1) = \pi/2$  и при  $b_2 = 0,07773$  луч-

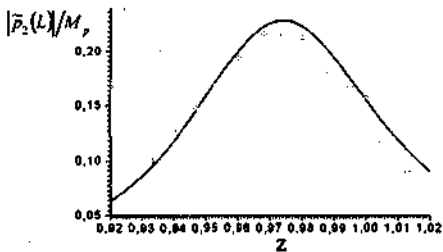


Рис.5. Зависимость  $|\tilde{p}_2(L)|/M_p$  от  $z = (2/\pi)(\omega L_0/c_0)$ . Сплошная линия – расчет по (15) при  $b_2 = 0,25$ ,  $L_0 = 1,7065$  м.,  $\ell_0 = 2,90$  мм, точки – Stuhltrager E., 1986.

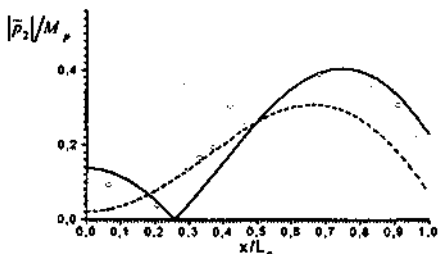


Рис.6. Распределение давления по длине трубы при точном резонансе, сплошная линия – расчет при  $b_2 = 0,25$ , штриховая линия – при  $b_2 = 0,07773$ , точки – Stuhltrager E., 1986.

ше согласуется с экспериментальными данными (Stuhltrager E., Thomann H. Oscillations of a gas in an open-ended tube near resonance // ZAMP. 1986. Vol.37. N 3. P.155-175). на второй четверти, однако при приближении к открытому концу трубы расхождения возрастают. Для теоретических данных, рассчитанных при  $b_2 = 0,25$ , наоборот, во второй четверти трубы наблюдаются существенные количественные расхождения, при приближении же к открытому концу согласование с экспериментом становится удовлетворительным. При этом максимум амплитуды колебаний давления, найденный при коэффици-

енте  $b_2 = 0,07773$  оказывается в полтора раза меньше, чем для  $b_2 = 0,25$  и смещен относительно него к середине трубы.

Для решения колебаний на частоте 3а) нет необходимости решать полученную во второй главе полученную систему уравнений (2) в третьем приближения, т.к. правые части уравнений для третьей гармоники имеют третий порядок малости, а ведущие члены в граничном условии на открытом конце - второй порядок. Достаточно рассмотреть однородную систему второго порядка. Решение этой системы записывается в виде

$$\tilde{u}_3^{(2)}(x) = r_3^{(2)} \sin[3k_0 x (1 + \beta_3' + i\beta_3'') + \alpha_3 + i\beta_3] \exp i(\psi_3 - \pi/2), \quad (16)$$

$$\tilde{p}_3^{(2)}(x) = r_3^{(2)} \cos[3k_0 x (1 + \beta_3' + i\beta_3'') + \alpha_3 + i\beta_3] \exp i\psi_3, \quad (17)$$

где  $\tilde{p}_3^{(2)} = p_3^{(2)} / \rho_0 c_0^2$ ,  $\tilde{u}_3^{(2)} = u_3^{(2)} / c_0$  - безразмерные амплитуды колебаний давления и скорости для третьей гармоники во втором приближении,  $r_3^{(2)}$ ,

$\psi_3$  - модуль и главное значение безразмерной амплитуды колебаний для третьей гармоники,  $f_3' = (\delta/2\sqrt{3}R) \left( (\gamma-1)/\sqrt{\text{Pr}} \right)$ .

Подставляя эти решения в граничные условия на поршне и открытом конце трубы, имеем безразмерную амплитуду колебаний

$$r_3^{(2)} = \frac{r_1^2 b_3}{\cos^2 3k_0 L (1 + \beta_3') + (3k_0 L \beta_3' + g_3^* r_1) \sin^2 3k_0 L (1 + \beta_3')} \quad (18)$$

и выражение для определения резонансной частоты

$$\text{ctg} 3k_0 L (1 + \beta_3') = (\gamma + 1) g_3^* r_1 (3k_0 L \beta_3' + g_3^* r_1) / 16 b_3. \quad (19)$$

Анализ обнаруживает, что правая часть (19) приводит к дополнительному удлинению трубы и тоже время она достаточно мала, чтобы считать, что резонанс на третьей гармонике наступает при

$$k_0 L (1 + \beta_3') \cong \pi/2. \quad (20)$$

Сопоставление результатов расчета  $r_3^{(2)} / M$  по (18) и экспериментальных данных (Stuhltrager E., Thoman H. Oscillations of a gas in an open-ended tube near resonance // ZAMP. 1986. Vol.37. N 3. P.155-175) (рис.7) показывает хорошее качественное совпадение. Количественное совпадение теорий и эксперимента лучше, когда расчет ведется при

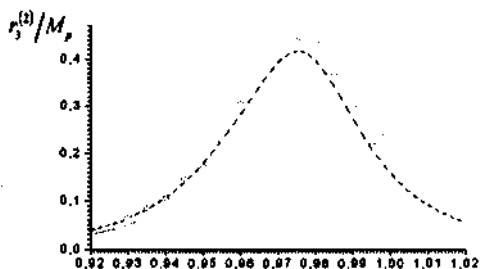


Рис.7 Зависимость безразмерной амплитуды колебаний  $r_3^{(2)} / M_p$  от безразмерной частоты  $z = (2/\pi) (\omega L_0 / c_0)$ . Сплошная линия - результат расчета по (18) при  $\sigma = 0,6133$ , штриховая линия - при  $\sigma = 1,5$ , точки - данные Stuhltrager E., 1986.

концевой поправке Релея  $\sigma = 1,5$ , а не при  $a = 0,6133$ .

При нелинейных колебаниях в трубе не только генерируются высшие гармоники, но и устанавливаются вторичные течения. Они представляют собой замкнутые вихри на оси трубы и тонком слое вблизи стенки с противоположным направлением вращения. Для описания вторичных потоков используются **осредненные** по времени уравнения (1) во втором приближении. После интегрирования получаем распределение осевой и радиальной компонент скорости по сечению трубы

$$\langle u_z \rangle = \frac{c_0 r_1^2}{4} \left\{ \left[ g_1(0, \text{Pr}) \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) + g_1(\eta, \text{Pr}) - \frac{\delta}{R} g_3(0, \text{Pr}) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \sin 2z - \frac{2\omega x}{c_0} \frac{\delta}{R} g_2(0, \text{Pr}) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right\}, \quad (21)$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{\omega R r_1^2}{8} \left\{ \left[ 2g_1(0, \text{Pr}) \left( \frac{r^3}{R^3} - \frac{r}{R} \right) - \frac{\delta}{R} \left( g_3(0, \text{Pr}) \left( \frac{r^3}{R^3} - \frac{2r}{R} \right) + g_3(\eta, \text{Pr}) \right) \right] \cos 2z - \frac{\delta}{R} \left[ g_2(0, \text{Pr}) \left( \frac{r^3}{R^3} - \frac{2r}{R} \right) + g_2(\eta, \text{Pr}) \right] \right\}, \quad (22)$$

где  $g_i(\eta, \text{Pr})$  - некоторые функции, зависящие от радиальной координаты и числа Прандтля, полученные в процессе интегрирования,  $g_i(0, \text{Pr})$  - функции зависящие только от числа Прандтля.

Максимальное значение осевой компоненты скорости  $\langle u_{2m} \rangle$  приходится

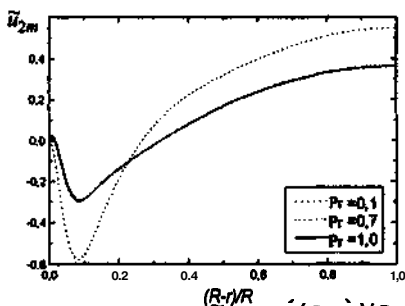


Рис.8. Зависимость  $u_{2m}$  от  $(R-r)/R$  для  $\text{Pr} = 0,1; 0,7; 1,0$  в ядре потока, соответствующей  $x = L/2$  для параметров установки Stuhltrager E., 1986.

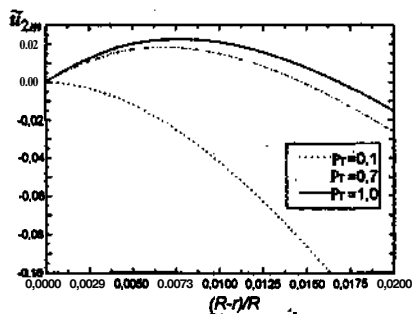


Рис.9. Зависимость  $u_{2m}$  от  $(R-r)/R$  для трех значений  $\text{Pr} = 0,1; 0,7; 1,0$  в пристеночной области, соответствующей  $x = L/2$  для параметров установки Stuhltrager E., 1986.

на середину трубы  $x = 0,5L$ . Из зависимостей  $u_{2m} = \langle u_{2m} \rangle / c_0 r_1^2$  от  $(L-r)/R$  для трех значений  $Pr$  в ядре потока (рис.8) можно заметить, что уменьшение числа **Прандтля** приводит к **существенному** (почти вдвое) росту абсолютного значения  $\dot{u}_{2m}$  вблизи стенки. В пристеночном вихре (рис.9), которому соответствуют участки с  $\dot{u}_{2m} > 0$ , осевая компонента скорости оказывается существенно меньше, чем в ядре потока. Уменьшение числа Прандтля способствует сокращению размеров области, занятой пристеночным вихрем, вплоть до исчезновения последнего.

Максимумам радиальной компоненты скорости соответствуют концы трубы  $x = 0, x = L$ . Распределение  $v_{2m} = \langle v_{2m} \rangle / \omega R r_1^2$  в ядре потока, соответствующая  $x = 0$ , по  $(R-r)/R$  для различных чисел Прандтля (рис.10) показывает, что уменьшение  $Pr$  способствует росту абсолютных значений  $\dot{v}_{2m}$  и сдвигу положения максимума  $\dot{v}_{2m}$  в сторону стенки трубы. Размер области занятой пристеночным вихрем (рис.11) для  $\dot{v}_{2m}$  также сокращается с уменьшением числа Прандтля. При этом **расстояние**, на котором  $\dot{v}_{2m}$  обращается в нуль, оказывается примерно вдвое больше аналогичного расстояния для  $\dot{u}_{2m}$ .

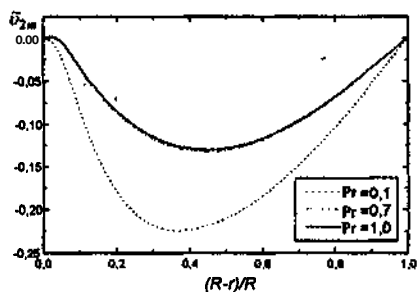


Рис. 10. Зависимость  $\dot{v}_{2m}$  от  $(R-r)/R$  для трех значений  $Pr = 0,1; 0,7; 1,0$  в ядре потока, соответствующей  $x = 0$  для параметров установки **Stuhltrager E., 1986.**

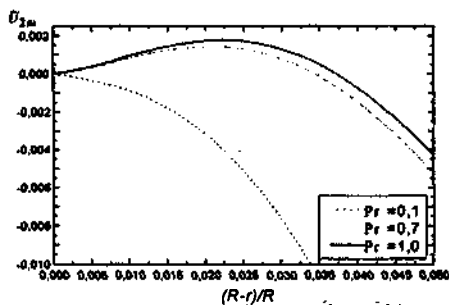


Рис. 11. Зависимость  $\dot{u}_{2m}$  от  $(R-r)/R$  для трех значений  $Pr = 0,1; 0,7; 1,0$  в пристеночной области, соответствующей  $x = 0$  для параметров установки **Stuhltrager E., 1986.**

Влияние пристеночного поглощения на вторичные течения заключено в отношении коэффициента  $c_0 r_1^2 / 4$  к скорости поршня  $u_p$  и определяется параметром  $N = k_0 L \beta'_1 / \sqrt{M_p}$ . Расчет показывает, что изменение  $N$  от 0,309 до 0,715 приводит к уменьшению амплитуды колебаний скорости  $r_1^2 / 4M$  от 1,719 до 0,914.

В пятой главе исследуются турбулентные осциллирующие потоки в трубах. Моделируется турбулентность в осциллирующих потоках. Дается

классификация турбулентных осциллирующих течений, основанная на характеристическом времени, за которое турбулентный пограничный слой достигает оси трубы. Толщина этого слоя определяется выражением

$$\delta(t) = \frac{\kappa v_0^*}{2\omega} f(\varphi), \quad f(\varphi) = \left( \int_0^{\varphi} \sin^{1/4} \tau d\tau \right)^2, \quad \varphi = \omega t + \phi, \quad (23)$$

где  $v_0^* = \sqrt{\tau_{w0}/\rho}$  - амплитуда динамической скорости,  $\tau_{w0}$  - амплитуда касательного напряжения на стенке,  $\kappa$  - постоянная Кармана. Время установления турбулентного пограничного слоя,  $a$ , следовательно, и поведение осциллирующего потока характеризуется критерием  $\kappa v_0^*/2\omega R$  в (23). На основании этого выделяем три группы, отличающиеся по свойствам потока (рис.12).

Если  $\kappa v_0^*/2\omega R > 1$  - потоки первой группы (пунктирная линия), то логарифмический пограничный слой развивается до середины трубы быстро в течение ранней стадии ускорения и существует в течение всего периода колебаний. Если  $\kappa v_0^*/2\omega R < 1$  - потоки второй группы (сплошная линия), то развитие логарифмического пограничного слоя происходит медленно и турбулентность достигает оси трубы на ранних стадиях торможения. При этом в фазе ускорения также существует логарифмический пограничный слой, но его

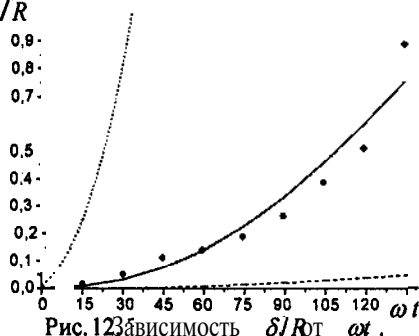


Рис. 12 Зависимость  $\delta/R$  от  $\omega t$ . Точки - экспериментальные данные Jensen B.L., 1989, сплошная линия - расчет по (23) для параметров установки Jensen B.L., 1989, пунктирная линия - Ohmi M., 1982, штриховая линия теория для потоков третьей группы.

толщина монотонно растет со временем. И, наконец, если  $\kappa v_0^*/2\omega R \ll 1$  - течения третьей группы (штриховая линия), то турбулентный пограничный слой развивается очень медленно и не достигает оси трубы в течение всего периода колебаний.

Далее исследуются потоки, в которых турбулентность достигает оси трубы на поздних стадиях разгона или ранних стадиях торможения (потоки второй группы). Уравнение баланса энергии для турбулентных осциллирующих течений в трубах имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = P - [\varepsilon_T] \quad (24)$$

$$\text{где } E = \frac{1}{2} \rho \int_0^R (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) dy, \quad P = \left[ -\rho \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} \right] = -\rho \int_0^R \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} dy, \quad (25)$$



Зависимости изменения кинетической энергии турбулентности  $\partial E/\partial t$  и порождения энергии турбулентности  $P$  от времени (рис.13), полученные при

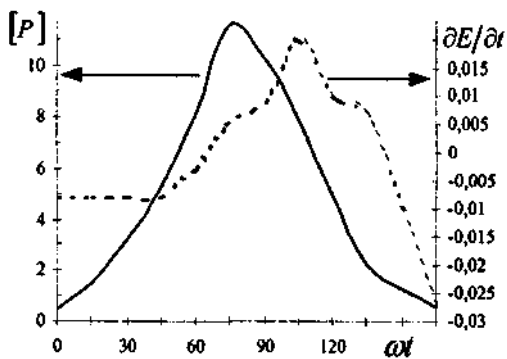


Рис.13. Зависимость порождения энергии турбулентности  $[P]$  - сплошная линия, и изменения кинетической энергии турбулентности  $\partial E/\partial t$  - пунктирная линия, от времени.

численном интегрировании данных (Jensen B.L., Sumer B.M., Fredsoe J.G. Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds number. // J. Fluid Mech. Vol.206. 1989. P.265-297) по выражениям (25) показывают, что максимум порождения энергии турбулентности  $P$  приходится на последнюю фазу разгона ( $\alpha t = 75^\circ$ ), а кинетическая энергия турбулентности  $\mathcal{E}$  на стадии разгона имеет тенденцию к снижению (отрицательные значения  $\partial E/\partial t$ ), а начиная с фазы торможения ( $\alpha t = 90^\circ$ ) - возрастанию. Кроме того, за исключением крайних точек ( $\alpha t < 0^\circ$  и  $\alpha t \approx 165^\circ$ ), величина  $\partial E/\partial t$  существенно меньше  $P$ . На основании этого и в силу того, что в стационарных потоках  $P$  и  $[\mathcal{E}_T]$  величины одного порядка можно сделать вывод, что осциллирующие потоки второй группы квазистационарны.

Для построения модели, соответствующей потокам второй группы развиваем течение на две области: пристеночную ( $0 < y < \delta$ ) и ядро ( $\delta < y < R$ ). Выражение, описывающее скорость в пристеночной области, получаем из уравнения баланса энергии, в котором все турбулентные характеристики определяются через касательное напряжение. Это выражение имеет то преимущество, что в него не входит явно турбулентная вязкость. В пристеночной области в свою очередь выделяем две стадии: ускорения и торможения.

В фазе ускорения касательное напряжение задаем как

$$\tau = \tau_w - \alpha y, \quad \alpha = \tau_w / \delta. \quad (26)$$

Соответственно выражение для профиля скорости имеет вид

$$\frac{U}{v_*} = (2A_T + 3B_1) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^{1/2} + A_T \ln \left[ \frac{1 - \sqrt{1 - y/\delta}}{1 + \sqrt{1 - y/\delta}} \right] + C, \quad (27)$$

$$C = A_T \ln(\delta v^*/\nu) + B - (2 - \ln 4) - 3B_1,$$

где  $v^*$  - динамическая скорость,  $B = 1,5$ ,  $3B_1 \approx -0,4A_T$ ,  $A_T$  - эмпирический

параметр, рассчитанный в **предположении**, что максимальные значения скорости по теории и эксперименту должны совпадать.

В фазе торможения профили касательного напряжения и скорости получаем в виде

$$\tau = \tau_w (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \Lambda_1 \xi(1 - \xi)^2), \quad (28)$$

$$\frac{U}{U^*} = A_T \left( \int_{y_1/\delta}^{y/\delta} \frac{\sqrt{(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \Lambda_1 \xi(1 - \xi)^2}}{\xi} d\xi \right) + 3B_1 + B, \quad (29)$$

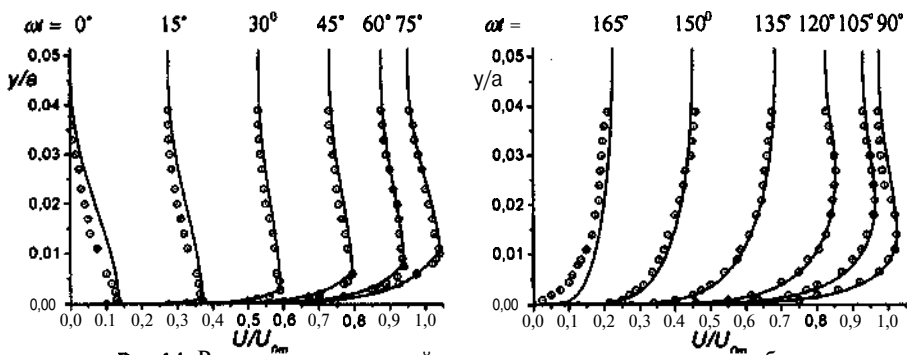
где  $\xi = y/\delta$ ,  $y_1 = v/U^*$ ,  $\Lambda = -\rho\delta\omega U_{0m} \cos\omega t / \tau_w$  - некоторая модификация **формпараметра** (параметра аэродинамической кривизны тела),  $\Lambda_1 = \alpha_0 \Lambda$ ,  $\alpha_0 = 0,0768$  - численный множитель,  $U_{0m}$  - амплитуда колебаний скорости на оси канала.

Профиль скорости в ядре потока для всего диапазона фаз задается в виде полинома и окончательно принимает вид

$$U - U_0 = (U_m - U_0) (1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4), \quad \eta = \frac{y - \delta}{R - \delta}, \quad (30)$$

где  $U_0$  - скорость на оси трубы,  $U_m$  - максимальная скорость потока. Полученный полином совпадает с распределением в свободных струях (Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение. 1969. 400с.).

Профили скорости потока (**рис.14**) для диапазона фаз от  $0^\circ$  до  $165^\circ$  показывают удовлетворительное согласие с экспериментальными данными (Jensen B.L., Sumer B.M., Fredsoe J.G. Turbulent oscillatory boundary layers at high Reynolds number. // J. Fluid Mech. Vol.206. 1989. P.265-297), за исключением ранней стадии ускорения ( $\omega t < 30^\circ$ ) и поздней стадии торможения ( $\omega t > 150^\circ$ ), где необходимо учитывать нестационарные эффекты. Пока **лога-**



**Рис.14.** Распределение средней скорости потока по радиусу трубы. Сплошная линия - результаты расчета по (27), (29), (30) точки - экспериментальные данные Jensen B.L., 1989.

**рифмический** пограничный слой не достиг оси трубы, максимум скорости наблюдается на расстоянии  $y = S$  и по величине заметно больше, чем на оси трубы, где изменения скорости происходят по гармоническому закону  $U_0 = U_{0m} \sin \alpha x$ .

В заключение данной главы исследуются резонансные колебания в полуконической трубе в турбулентном режиме течения для потоков, в которых турбулентный пограничный слой достигает оси трубы спустя определенное время после начала ускорения (потоки второй группы). Колебания описываются полученными во второй главе уравнениями (2) в первом приближении. Выразим касательное напряжение и тепловой поток на стенке через эффективную скорость и давление. В результате система решается совместно с граничными условиями на поршне и на открытом конце трубы (11) и находится безразмерная амплитуда колебаний

$$r_1 \sqrt{\cos^2(k_0 + b_1)L + (mr_1 + b_2L)^2} \sin^2(k_0 + b_1)L = M_p \quad (31)$$

где  $b_1 = \frac{\beta_0 \gamma \sin \phi_0}{Rc_0}$ ,  $b_2 = \frac{\beta_0 \gamma \cos \phi_0}{Rc_0}$ ,  $\beta_0 = 0,024(\omega\nu)^{0,2} c_0^{0,6} r_1^{0,6}$ ,  $\phi_0 = 0,1308$ .

При точном резонансе  $(k_0 + b_1)L = \pi/2$  вместо (31) имеем

$$r_1(mr_1 + b_2L) = M_p \quad (32)$$

На рис.15 изображены зависимости безразмерной амплитуды колебаний от длины трубы, полученные в трубе с конусным переходником при  $\ell_0 = 0,04575\text{ м}$  для двух геометрий от,  $= d_p/d_T$ , где  $d$  - диаметр поршня,  $d_T$  - диаметр трубы. Теоретические данные, рассчитанных по (32), с использованием эффективной амплитуды смещения поршня  $\ell_s = m_1^2 \ell_0$  удовлетворительно совпадают с экспериментальными результатами (Репин В.Б., Новиков Ю.Н., Дементьев А.П. Экспериментальное исследование нелинейных колебаний газа в открытой трубе // Нестационарные задачи механики. Труды семинара / Казанск. физ.-техн. ин-т. 1989. № 22. С.103-110). Кроме того, расчет по формуле  $r_1 = 1,9084/L$ , показывает, что зависимость амплитуды колебаний  $r_1$  от длины трубы  $L$  достаточно близка к обратно пропорциональной.

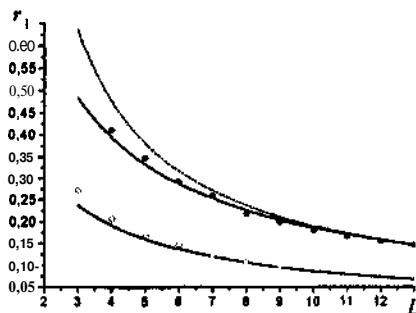


Рис.15. Зависимость безразмерной амплитуды колебаний от длины трубы.

Точки - экспериментальные данные Репин В.Б., 1989, полученные в трубе с конусным переходником для двух геометрий: • - при  $m_1 = 2,2727$ , • - при  $m_1 = 1,1818$ . Сплошные линии - результаты расчета по (32). Штриховая линия - расчет по формуле  $r_1 = 1,9084/L$ .

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Получено аналитическое решение для второй гармоники при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе в области перехода к периодическим ударным волнам. Показано, что вторая гармоника генерируется за счет нелинейности газового **столба** и нелинейности, обусловленной граничным условием на поршне. Причем последняя оказывается существенно меньше нелинейности газового столба.

2. Исследованы **резонансные** колебания газа в закрытой трубе при наличии осевого скачка температуры. Установлено, что резонансная частота является только функцией положения скачка температур и отношения величин температур в первой и второй среде. Безразмерная амплитуда колебаний газа зависит от ориентации поршня относительно сред.

3. Задано аналитическое граничное условие на открытом конце с учетом **полигармоничности** колебаний скорости газа у выходного сечения трубы. Показано, что для расчета колебаний на основной частоте с достаточной точностью можно считать колебания скорости на открытом конце моногармоничными, а при расчете второй и третьей гармоники необходимо учитывать вклад в спектр скорости высших гармоник.

4. Рассчитаны вторая и третья гармоника с учетом полигармоничности колебаний скорости на открытом конце трубы при колебаниях газа возбуждаемых поршнем, колеблющимся на фундаментальной частоте газового столба. Выявлено, что высшие гармоники генерируются за счет нелинейности газового столба внутри трубы, нелинейности газа вблизи открытого конца трубы, а также нелинейности граничного условия на поршне.

5. Исследованы вторичные течения в вязком и теплопроводном газе в полуоткрытой трубе. Скорость потока существенно зависит от числа **Прандтля** и поглощения на стенках трубы. В частности, уменьшение числа Прандтля приводит к сокращению области занятой пристеночным вихрем. Рост пристеночного поглощения **приводит** к уменьшению скорости вторичных течений.

6. Изучены турбулентные осциллирующие потоки в трубах. Выявлен критерий, характеризующий время установления турбулентного пограничного слоя и выполнена классификация осциллирующих потоков. Выделена группа течений, в которых логарифмический пограничный слой достигает оси на поздних стадиях ускорения. Определены условия квазистационарности таких потоков и построена для них математическая модель.

7. Проведены исследования резонансных колебаний газа в полуоткрытой трубе на основе развитой модели турбулентности. Установлено, что зависимость амплитуды колебаний от длины трубы близка к обратнопропорциональной.

8. Полученные теоретические результаты качественно и количественно согласуются с известными экспериментальными данными.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Тимохина Л.А.** Модель турбулентных осциллирующих потоков в гладких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Галиуллина Э.Р., Пермьяков Е.И. // Инженерно-физический журнал. - 2001. - Т.74. - N 3. - С.121-124. - **Библиогр.:** с. 124 (12 назв.). - ISSN 0021-0285.
2. **Тимохина Л.А.** Акустические течения при резонансных колебаниях газа в цилиндрической трубе / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // Акустический журнал. - 2001. - Т.47. - N 5. - С.611-615. - **Библиогр.:** с. 615 (11 назв.). - ISSN 0320-7919.
3. **Тимохина Л.А.** Акустическое течение при распространении волн в узких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // Акустический журнал. - 2002. - Т.48. - N 6. - С.764-766. - **Библиогр.:** с. 766 (11 назв.). - ISSN 0320-7919.
4. **Тимохина Л.А.** Резонансные колебания в закрытой трубе со скачком температуры / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // Известия ВУЗов. Авиационная техника. - 2002. - N 4. - С.33-36. - **Библиогр.:** с. 36 (10 назв.). - ISSN 0579-2975.
5. **Тимохина Л.А.** Влияние поглощения на резонансные колебания газа в закрытой трубе/ Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А. // **Внутрикамерные процессы в энергетических установках, акустика, диагностика: Тез.докл./ 11 Научно-техн. семинар, Казань, май 1999 г. - Казань, 1999. - С.79-80.**
6. **Тимохина Л.А.** Модель турбулентности для колеблющихся потоков в гладких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Галиуллина Э.Р. // Нелинейные колебания механических систем: **Тез.докл./ V Международная конф., Н. Новгород, сент. 1999 г. - Н. Новгород, 1999. - С.59-60.**
7. **Тимохина Л.А.** Модель турбулентности для колеблющихся потоков в гладких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Галиуллина Э.Р. // Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Тезисы докладов / Школа-семинар молодых ученых и специалистов, Казань, сент. 1999г. – **Казань, 1999. – С.91-94.**
8. **Тимохина Л.А.** Вторичные течения при резонансных колебаниях газа в трубе с открытым концом / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А. // Внутрикамерные процессы в энергетических установках, акустика, диагностика, экология: Тезисы докладов. / **12 Межвузовский научно-технический семинар, Казань, май 2000 г. - Казань, 2000. - С.187-189.**
9. **Тимохина Л.А.** Колебательные процессы в ограниченных и неограниченных струях / Галиуллин Р.Г., Ларионов В.М., Назаренко Т.И., Тимохина Л.А. // Тезисы докладов / III Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях, Истра-Москва, июль 2000 г. - Истра-Москва, 2000. - С.97-98.
10. **Тимохина Л.А.** Вторичные течения при распространении волн в узких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А. // Актуальные проблемы мате-

матики и механики: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.5 / Международная научная конференция, Казань, окт. 2000 г. - Казань, 2000. - С.265-266.

11. Тимохина **Л.А.** Нелинейные резонансные колебания **газа** в трубе с открытым концом при больших числах **Струхаля** / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Галиуллина Э.Р. // Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Тез.докл. / Всероссийская школа-семинар молодых ученых и спец-ов, Казань, окт.2000 г.- Казань, 2000. - С.36-37.

12. Тимохина **Л.А.** Влияние ориентации поршня на резонансные колебания в закрытой трубе со скачком температуры / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // **Внутрикамер.** процессы в энергет. **устан.**, акустика, диагностика, экология: Тез.докл. / XIII Всероссийская межвузовская **научно-техн. конф.**, Казань, май 2001 г. - Казань, 2001. - С.121-122.

13. Тимохина **Л.А.** Колебания удвоенной частоты при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // Тезисы докладов / IV Научно-практическая конференция молодых ученых и специалистов РТ, Казань, дек. 2001 г. - Казань, 2001. - С.57.

14. Тимохина **Л.А.** Вторичные течения при распространении волн в узких трубах / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // Тезисы докладов / IV Научно-практическая конференция молодых ученых и специалистов РТ, Казань, дек. 2001 г. - Казань, 2001. - С.58.

15. Тимохина **Л.А.** Колебания удвоенной частоты при резонансных колебаниях газа в открытой **трубе**/Тимохина Л.А., Галиуллин Р.Г.// Аналитическая механика, устойчивость, управление движением: **Тез.докл./ VIII** Четаяевская Междунар.конф., Казань, май 2002 г.-Казань, 2002.- С.288.

16. Тимохина **Л.А.** Колебания удвоенной частоты при резонансных колебаниях газа в открытой трубе / Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е. // **Внутрикамерные** процессы в энергетических установках, акустика, **диагностика**, экология: **Тез.докл./ XIV** Всероссийская межвузовская научно-техн. конференция, Казань, май 2002 г. - Казань, 2002. - С.41.

17. Тимохина **Л.А.** Нелинейные эффекты при резонансных колебаниях газа в открытой трубе/ Галиуллин Р.Г, Тимохина **Л.А.**, Филипов С.Е. // Нелинейные колебания механических систем: Тезисы докладов / VI Научная конференция, Н. Новгород, **сент.** 2002 г. - Н. Новгород. 2002. - С.44-45.

18. Тимохина **Л.А.** Колебания удвоенной частоты в резонансной закрытой трубе / Тимохина Л.А, Галиуллин Р.Г. // Проблемы тепломассообмена и **гидродинамики** в энергомашиностроении: Материалы докладов / Всероссийская школа-семинар молодых ученых и специалистов, Казань, окт. 2002 г. - Казань, 2002. - С.64-65.

19. **Ткаченко Л.А.** Основной резонанс в полуоткрытой трубе при турбулентном режиме колебаний газа / Галиуллин Р.Г., Ткаченко Л.А. // Механика сплошных сред: Тезисы докладов / 13 Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, февр. 2003 г. - Пермь, 2003. - С.98.